DIE WELT UM UNS GESTALTEN: MATHEMATIK UND KULTURELLE INSPIRATION IM DESIGN

Beschreibung

Diese Aktivität fördert die Entwicklung geometrischen Verstehens durch den Einsatz zweidimensionaler Formen in kulturellem und religiösem Symbolen und in ihrer Verwendung in der Architektur, insbesondere durch den Gebrauch von Parkettierungen. Dabei bestehen viele Möglichkeiten, zu erkunden, wie symbolischen Darstellungen bestimmte Ideen und Glaubensinhalte zugrunde liegen. Es gibt sieben Aufgaben.

Kompetenzen des Global Citizenship

- Erkennen und Wertschätzen unterschiedlicher Perspektiven und Weltanschauungen
- Positive Interaktionen mit unterschiedlichen Menschen
- Partizipation und Mitgestaltung in den Bereichen der nachhaltigen Entwicklung und des sozialen Wohlergehens
- Fähigkeit zur Analyse und kritischen Reflektion
- Kommunikations- und Kooperationsfähigkeiten

Global Citizenship Themen

Inklusive soziale Beziehungen; interkultureller Austausch; Wissen über andere Kulturen; Geschichtsbewusstsein

Mathematische Kompetenzen

- Problemlösen/kreativ sein
    - Mathematische Probleme bearbeiten
    - Zusammenhänge durch systematisches Probieren, Reflektieren und Prüfen erschließen
      Erkenntnisse übertragen, variieren und erfinden
- Modellieren
    - Sachsituationen in der Erfahrungswelt erfassen
    - Sie in mathematische Modelle übertragen und mit Hilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten bearbeiten
    - Die Lösung auf die Sachsituation zurückbeziehen
    - Kritisch beurteilen, inwiefern die Modellierung geeignet ist, die Beobachtung der Erfahrungswelt angemessen zu beschreiben
    - Die politischen und ethischen Dimensionen der Mathematik beachten
- Argumentieren, Darstellen/Kommunizieren
    - Den Wert von Argumentieren und logischem Schließen erkennen
    - Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten (sprachlich, handelnd, zeichnerisch) erklären
    - Eigene Denkprozesse oder Vorgehensweisen angemessen und nachvollziehbar darstellen

Mathematischer Inhalt

Bezeichnungen und Eigenschaften zweidimensionaler Formen und Figuren; Spiegelsymmetrie und Drehsymmetrie, Teilbarkeit, Primzahlen und Teilerfremdheit; reguläre und semireguläre Parkettierungen

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Benötigtes Material

Lineale; 15-, 20-, 25-, 30- und 48-Punkte-Kreise; Farben und eine Auswahl an Designressourcen; Zugang zu Computern; reichlicher Vorrat an Dreiecken, Quadraten und Sechsecken mit gleicher Seitenlänge; Kameras

Erforderliche Zeit (innerhalb und außerhalb des Klassenraums)

Schätzungsweise acht Stunden.

Organisation und praktische Hinweise

Frontalunterricht und kleine Gruppenarbeiten. Aufgabe 6 beginnt am besten als Hausaufgabe.

Aufbau der Einheit

Der Übungsablauf wurde so konzipiert, dass Aufgabe 6 den Kern der Aktivitäten bildet, zusammen mit einer weiteren, optionalen Aufgabe. Zu den generell angestrebten Lernergebnissen könnte man folgende Fähigkeiten zählen:

- zweidimensionale Formen erkennen
- Formen anhand unterschiedlicher Kriterien ordnen
- Beispiele für den Gebrauch verschiedener Formen zur Verschönerung liefern
- reguläre und semireguläre Parkettierungsmuster erkennen und erzeugen
- Muster erkennen, die Teilbarkeit, Primzahlen und Teilerfremdheit aufweisen
- die wichtigsten universellen Symbole (wie z. B. religiöse Symbole) erkennen
- geometrische Formen, die ihnen sozial beigemessene Bedeutung und ihren Gebrauch in der Gestaltung wichtiger Institutionen in Beziehung setzen
- Formen und Muster zur Darstellung von (sozialen) Beziehungen benützen

Aufgabe 1: Designen mit regelmäßigen Polygonen (ca. 1½ Stunden)

Man nützt die Folien 1, 2, 3, 4 und 5 als Anregung.

Stellt euch vor, ihr seid Designer der Zukunft.

Erläutern Sie, dass diese Aktivität darin besteht, mit Mathematik und unserem kulturellen Erbe ansprechende Muster zu entwickeln.

Image credits: User:Vmenkov [CC BY-SA 3.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wuhan_-_Future_City_-_Area_G_-_P1530366.JPG

Was muss ein Designer wissen, damit er es schafft, dass Menschen sich wohlfühlen?

Mögliche Voraussetzungen dafür sind mathematisches Wissen, ein Gefühl für Ästhetik, Vorstellungskraft, Kreativität, Allgemeinwissen, gestalterische Fähigkeiten, eine hingebungsvolle Einstellung und Übung.

Folie 6 legt die Aufgabe dar.

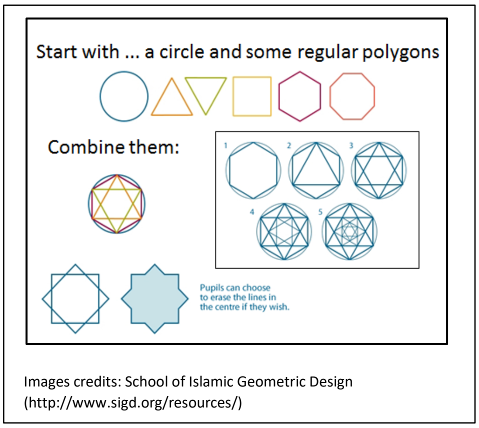
Was ist ein Polygon?

Ein Polygon ist eine geschlossene, zweidimensionale Figur mit geraden Kanten. Mit Gegenbeispielen zeigt man, warum jeder Teil der Definition gebraucht wird.

Was ist ein regelmäßiges Polygon?

Ein regelmäßiges Polygon ist ein (konvexes) Polygon, bei dem alle Seiten und alle Winkel gleich groß sind. Die Schüler sollen Formen skizzieren, die wiederum zeigen, dass beide Teile der Definition gebraucht werden.

Geben Sie den Schülern 48-Punkte-Kreise und fordert sie auf, ein Bild aus den Formen der Folie 6 zu erzeugen und/oder irgendwelchen anderen regelmäßigen Polygonen, die man durch die Verbindung der Punkte erhält.



Mithilfe der Folien 7, 8, 9, 10, 11 und 12 sollen Spiegel- und die Drehsymmetrie besprochen werden.

Welche Symbole besitzen nur Drehsymmetrie?

Man sollte den Begriff der Symmetrieordnungen einführen. (Jede Figur besitzt Rotationssymmetrie erster Ordnung, aber man spricht dabei noch nicht von Rotationssymmetrie.)

In kleinen Gruppen können die Schüler dann die Symmetrien der Designs diskutieren, die sie erzeugt haben. Nahezu alle von diesen werden Spiegel- und Drehsymmetrie besitzen. Jede der Gruppen präsentiert eines ihrer Designs der Klasse und dessen Symmetrien werden diskutiert.

Man weist darauf hin, dass jede Figur mit Spiegelsymmetrie der Ordnung 2 auch eine Drehsymmetrie der Ordnung 2 besitzt.

Macht zwei Kopien eurer Figur. Färbt eines so ein, dass es Spiegel- und Drehsymmetrie besitzt, und das andere so, dass es nur Drehsymmetrie besitzt.

☺+☺ Die Designs könnte man ausstellen und über eTwinning teilen.

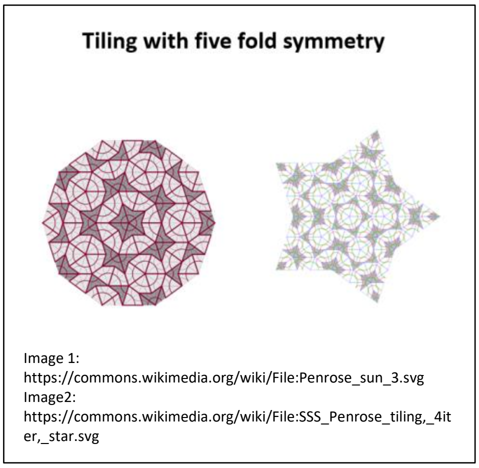
Aufgabe 2: Pentagonale Symmetrien (1 Stunde)

Welche Symmetrie-Ordnungen hatten unsere Figuren? *Was fällt euch an allen diesen Zahlen auf?*

Sie sind Teiler von 48. Auf welche Ordnungen könnten wir in einem 48-Punkte-Kreis nicht kommen?

Folie 13 soll bei der Besprechung von Symmetrie-Ordnungen helfen, die man in islamischen Designs findet. Folie 14 zeigt Bilder von islamischer Parkettierung mit fünffacher Symmetrie.

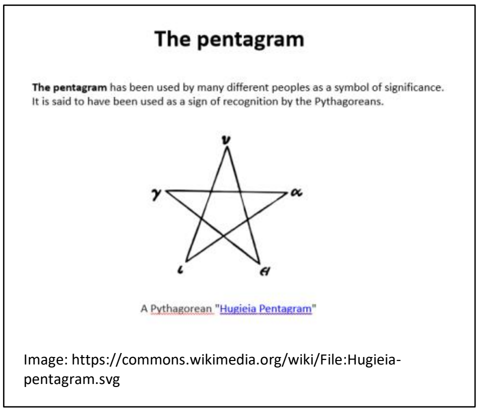
Man bespricht dann das Fünfeck und den fünfzackigen Stern – das Pentagramm. Das Pentagramm war immer schon von großer



Bedeutung in vielen verschiedenen Kulturen. Es heißt, dass es das geheime Zeichen der Pythagoreer gewesen sein soll.

Man bittet zehn Schüler, einen Kreis zu bilden. Sie sollen sich dann ein Wollknäuel einmal im Kreis herum der Reihe nach zuwerfen.

Welche Form haben wir erzeugt? Wie viele Punkte am Kreis würden ein Fünfeck ergeben?



Man bittet eine zweite Zehnergruppe, das zu zeigen.

Wie viele Punkte am Kreis würden ein Pentagramm ergeben?

Die Schüler können das in kleinen Gruppen diskutieren und eine dritte Zehnergruppe probiert die verschiedenen Vorschläge aus.

Dann werden 15-, 20-, 25- und 30-Punkte-Kreise an verschiedene Gruppen verteilt.

Wie viele Punkte braucht es, um auf eurem Kreis ein Pentagramm zu bilden?

Wer früher fertig ist, kann über einen 35-Punkte-Kreis nachdenken. Die Ergebnisse werden gesammelt.

Was fällt euch an diesen Zahlen auf?

Unterstützen Sie die Diskussion der Schüler mit den Begriffen “Verhältnis” und “Bruch”.

Mithilfe des elektronischen Arbeitsblatts http://tube.geogebra.org/material/show/id/1385121 können die Schüler ihre Vorhersagen für 5, 35 und 40 testen.

Aufgabe 3: Erforschung von Mustern in Punkte-Kreisen (1 Stunde oder länger, wenn man in die Tiefe geht)

Die Erforschung von Mustern in Punkte-Kreisen bietet viele weitere Gelegenheiten, über Teilbarkeit, Primzahlen und Teilerfremdheit nachzudenken.

Man ermutigt die Schüler, so viele Fragen wie möglich selbst zu stellen. Viele verschiedene Fragen bieten sich an, z.B.:

Was passiert mit einem Sprung der Größe 1?

Kann ich in demselben Kreis immer dieselbe Form bilden, aber auf verschiedene Arten?

Wann kann ich ein Quadrat erzeugen? Ein Dreieck? Ein Pentagon?

Und so weiter.

Wann habe ich jeden Punkt einmal besucht?

Gibt es auch Kreise, in denen ich immer jeden Punkt besuche?

Was für Zahlen sind das?

Wenn ich die Anzahl der Linien und der Umrundungen zähle, können wir Vorhersagen treffen?

Idealerweise haben die Schüler Zugang zu dem elektronischen Arbeitsblatt. Sonst muss eine Vielzahl von Punkte-Kreisen zur Verfügung stehen.

Aufgabe 4: Designen eines Symbols, das unsere Klasse darstellt (1 Stunde)

Die Folien 6 bis 12 zeigen eine Vielzahl an Symbolen aus vielen verschiedenen Kulturen und Zeiträumen. Alle diese Symbole besitzen mathematische Eigenschaften. Man bespricht die Symbole mit der Klasse und ermutigt die Schüler, über die Symmetrien der Symbole zu diskutieren und über die Bedeutungen, die durch diese und andere Eigenschaften der Bilder vermittelt werden.

Mit all dem schon Gelernten, inklusive der Bedeutungen der symbolischen Darstellungen, sollen die die Schüler in kleinen Gruppen arbeiten, um ein Symbol zu designen, das ihre Klasse abbildet. Beginnen lässt sich mit einer Diskussion darüber, was an den von der Klasse vertretenen Werten wichtig ist, welche Arten von Beziehungen sie abbilden könnten, und so weiter.

Was für Motive könntet ihr verwenden? Wie werdet ihr unsere Beziehungen und Lerngemeinschaft darstellen? Wie werdet ihr dazu Symmetrien einsetzen?

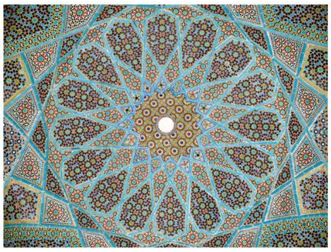
Dem folgt eine Besprechung der Designs. Welche Arten von Beziehungen bilden sie ab? Welche Formen verwenden sie und warum? Verwenden einige der Designs Symmetrien, um Beziehungen darzustellen? Hat eine der Gruppen versucht, Fairness und Ausgewogenheit darzustellen?

Die Klasse kann ihre Symbole bei Bedarf über eTwinning teilen.

Aufgabe 5: Mathematische Erforschung von Parkettierungen (2 Stunden)

Folie 16 und dieses dreiminütige Video über Isfahan (https://www.youtube.com/watch?v=QqbiDdsaZw4) dienen als Anregung, um über Parkettierungsmuster nachzudenken.

Medieval Islamic tiling reveals mathematical savvy



Man zeigt diese vereinfachte Version eines Artikels und drei Bilder aus der Fachzeitschrift New Scientist (https://www.newscientist.com/article/dn11235-medieval-islamic-tiling-reveals-mathematical-savvy/):

Islamische Künstler verwendeten schon im Mittelalter komplizierte geometrische Parkettierungen, mindestens 500 Jahre bevor westliche Mathematiker die Idee entwickelten.

Das geometrische Design “girih” wurde weithin benützt, um islamische Gebäude zu verzieren, aber das fortgeschrittene mathematische Prinzip in den Mustern wurde erst in unserer Zeit erkannt. Gewisse Fliesen aus dem 15. Jahrhundert bildeten sogenannte Penrose-Muster. Penrose-Parkettierung ist ein Konzept, das im Westen erst in den 1970er Jahren des vergangenen Jahrhunderts entwickelt wurde.

Girih Designs wurden aus fünf regelmäßig geformten Kacheln zusammengestellt, nämlich einer Schleifenform, einer Raute, einem Fünfeck, einem länglichen Sechseck und einem Zehneck (Folie 17).

In bestimmten Materialien können sich die Atome in ähnlichen Mustern ohne Verschiebungssymmetrie anordnen. Man nennt das Quasikristalle. Sie werden deswegen so genannt, weil sie eine wohldefinierte Struktur aufweisen, die Atome aber nicht so regelmäßig verteilt sind, wie das bei normalen Kristallen der Fall ist.

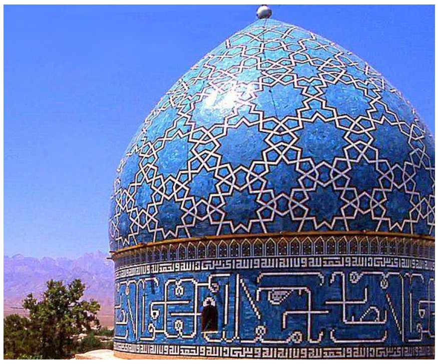


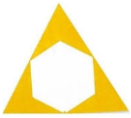
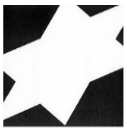
Image source:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Shah_Nematollah_Vali_Shrine_13_detail.jpg Author: anaareh saaveh

Die Übereinstimmung zwischen mathematisch Mustern und der natürlichen Welt ist immer faszinierend. Die Schüler könnten sich überlegen, ob es noch andere Arten von Übereinstimmung gibt – beispielsweise zwischen der Mathematik und der Seele.

Man erklärt den Schülern dann, dass sie damit beginnen sollen, über sehr einfache, sich regelmäßig wiederholende Parkettierungsmuster nachzudenken.

Die einfachsten Parkettierungen verwenden nur eine Form. Wenn wir nur regelmäßige Polygone verwenden, entsteht eine reguläre Parkettierung. Wie viele davon gibt es? Wie können wir wissen, dass wir alle gefunden haben?

Um das weiter zu erforschen, braucht man einen großen Vorrat an Dreiecken, Quadraten und Hexagonen mit derselben Seitenlänge. Eine gute Bezugsquelle dafür findet man unter dem folgenden Link. https://www.atm.org.uk/Shop/MATs---View-All

Zuerst können die Schüler frei mit Parkettierungen experimentieren, unter Verwendung einer oder aller drei Formen. Man macht sie mit der Regel bekannt, dass die Parkettierungsmuster *periodisch* sein müssen, das heißt, dass sich das Muster regelmäßig in alle Richtungen auf der Ebene wiederholt. Sie können Fotos jener Designs machen, die ihnen gefallen.

Wenn man eine neue Regel einführt, wird man entdecken, dass nur wenige dieser Muster zulässig sind.

Semireguläre Parkettierung verwendet regelmäßige Polygone von mehr als einer Art. Zusätzlich muss jede Ecke, an der sich die Fliesen berühren, gleich sein.

Gibt es unter den von uns schon erzeugten Mustern auch semireguläre?

Es gibt fünf semireguläre Parkettierungen, die man aus diesen Formen bilden kann. Könnt ihr sie alle finden?

Könnt ihr beweisen, dass es nicht noch mehr gibt? (Tipp: Bedenkt die möglichen Arten, wie die Formen sich an einer Ecke berühren können.)

Aufgabe 6: Parkettierungen in der Welt um uns (1 ½ Stunden)

Man zeigt den Schülern ein Bild von einer semiregulären Parkettierung aus der vorherigen Übung, ein Ausschnitt des gekachelten Bodens im Museo Arqueológico de Sevilla, Spanien (Folie 18) (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Semi-regular-floor-3464.JPG).

Parkettierungen findet man überall um uns herum, sowohl in sehr alten als auch in modernen Gebäuden.

Die Schüler sollen nach Parkettierungen in ihrer Umgebung suchen. Diese sollen sie dann fotografieren, um sie den anderen zu zeigen und die mathematischen Eigenschaften der Parkettierungen zu besprechen, die sie gefunden haben.

Aufgabe 7 (optional): Reflexion über das Wesen/die Regeln der sozialen Welt um mich (1 Stunde)

In Aufgabe 4 haben wir das "Teilen"-Symbol betrachtet. Ihr habt ein mathematisches Symbol designt, das die Klasse darstellt. Und ihr habt viel über Symmetrie nachgedacht.

Man fordert die Schüler auf, zu überlegen, ob soziale Beziehungen geometrisch abgebildet werden könnten und welche Regeln dafür gelten würden (Folie 19).

Image credit: Background vector created by freepik - www.freepik.com (cropped)

Es gibt mehrere Herangehensweisen für die Diskussion, z. B.:

(1) Gemeinsamkeiten & Unterschiede.

Denkt an die Punkte oder Kreise die ihr benützt, um jeden von euch darzustellen. Haben sie dieselbe Farbe und Größe? Warum nicht? Verleiht das der Welt nicht ein bisschen mehr Schönheit?

Denkt an die Linien, die euch paarweise verbinden. Sind sie gleich? Warum nicht?

Was verbindet uns und was unterscheidet uns?

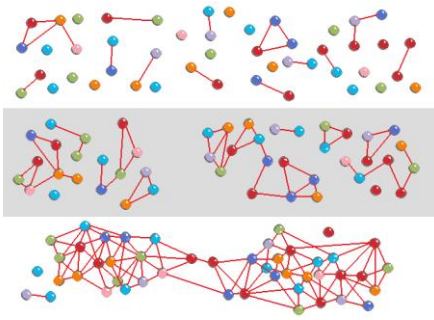


Image source: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Network_self-organization_stages.png Author: Takemori39

(2) Gegenwart & Zukunft. Beständig & sich verändernd. Das sich entwickelnde Wesen menschlicher Beziehungen.

Vermutlich wird sich euer jetziger Freundeskreis mit der Zeit ändern – Klassenkameradinnen und -kameraden, mit denen ihr nur selten sprecht, können zu euren besten Freunden werden. Worin besteht dann der Wert einer Zeichnung, um die momentanen Beziehungen in eurer Klasse darzustellen? Könnte man dafür jemals eine Parkettierung erstellen?

Verbindungen schaffen. *Denkt daran, wie ihr eure beste Freundin oder euren besten Freund kennengelernt habt. Wart ihr von Anfang an Freunde oder wurdet ihr es erst mit der Zeit?*

Die Welt ist eine sich bewegende Fliese. *Was bräuchte es, um mit jemandem von einem anderen Teil der Welt Freundschaft zu schließen?*

(3) Subjektiv versus objektiv.

Wenn eine außenstehende Person, die euch überhaupt nicht kennt, eure Klasse darstellen würde, würde die Zeichnung anders aussehen? Wären die Kreise, die einzelne Schüler darstellen, dieselben sein? Was ist mit den Linien, die euch verbinden – hätten sie die gleiche Länge? Was bedeutet das?

Denkt ihr, dass ihr eine Gemeinsamkeit mit allen Kindern auf diesem Planeten finden könnt?

Zusätzliche Lernmöglichkeiten

Mögliche Diskussionsthemen, die man eingehender erkunden könnte, ausgehend von den Zeichnungen der Schüler, die ihre Klasse darstellen sollen, und von der Diskussion der Schüler über die Abbildung sozialer Beziehungen:

- Gleichberechtigung
- Diversität
- Inklusion
- Fairness

Die Themen sollten vermutlich eingehender im Fach politische Bildung behandelt werden, oder im Rahmen einer speziellen außerschulischen Aktivität, an der all Schüler einer Klasse teilnehmen.

Weitere Materialien und Ressourcen

Videos:

http://www.etereaestudios.com/docs_html/isfahan_htm/isfahan_movie_index.htm#

http://www.etereaestudios.com/docs_html/arsqubica_htm/index.htm

Links:

School of Islamic Geometric Design. Resources. Online: http://www.sigd.org/resources/

School of Islamic Geometric Design. Basic Design Principles. Online: http://www.sigd.org/resources/basic-design-principles/

Lu, Peter J. & Steinhardt, Paul J. (2007). Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture. In: *Science* 23 Feb 2007: Vol. 315, Issue 5815, pp. 1106-1110. DOI: 10.1126/science.1135491 Online: http://science.sciencemag.org/content/315/5815/1106

Dunham, Will (2007). Islamic maths was 500 years ahead. [Reuters] Online: http://www.abc.net.au/science/articles/2007/02/23/1855313.htm

Hecht, Jeff (2007). Medieval Islamic tiling reveals mathematical savvy. In: Daily News. Online: https://www.newscientist.com/article/dn11235-medieval-islamic-tiling-reveals-mathematical-savvy/

National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics (2009). The Art of Mathematics Islamic patterns. In: Primary Magazine - Issue 13: The Art of Mathematics. Online: https://www.ncetm.org.uk/resources/18030

NRICH Enriching Mathematics. Islamic Tiling. Tiling with Equilateral Triangles. Serendipity. Online: https://nrich.maths.org/1561 , https://nrich.maths.org/1545 , https://nrich.maths.org/1559

Bilder:

https://www.ancient-symbols.com/religious_symbols.html

http://mathworld.wolfram.com/HeartCurve.html

https://www.shutterstock.com/search/social+science

Mögliche ethische Herausforderungen

Ein Symbol zu designen, das die Klasse darstellen soll, kann zu ethischen Dilemmata führen, insbesondere bezüglich Inklusion und Diversität:

Wir ähneln uns in Herz und Verstand – warum besitzen wir nicht dieselben Überzeugungen und Erwartungen? Haben wir alle dasselbe Verhältnis zueinander? Nach welchen Kriterien tauscht ihr eure Gedanken aus oder teilt ihr Ressourcen mit euren Klassenkameradinnen und -kameraden? Können die Beziehungen zwischen den Schülern eurer Klasse regelmäßig dargestellt werden, mit gleichem Abstand zueinander?

Sind Unterschiede zwischen den Menschen vorteilhaft oder nachteilig für eine Gruppe? Besitzen wir alle dieselbe Art von Heiligtümern? Wie leiten andere Glaubensinhalte das Leben von Menschen?

In Aufgabe 4 erforschen und diskutieren Schüler mit Unterstützung des Lehrers Bedeutungen, die verschiedenen religiösen Symbolen zugeschrieben werden. Der Lehrer sollte den Versuch vermeiden, Symbole oder ideologische Auffassungen zu kategorisieren oder sie mit unpassenden Konnotationen zu versehen.